Wstęp do teorii gier

Joanna Franaszek

semestr zimowy 2021/22

Szkoła Główna Handlowa

Warunki zaliczenia

Sylabus:

- egzamin tradycyjny-pisemny 80%
- ćwiczenia 20%

Powszechna praktyka na WTG:

- możliwość zaliczenia bez egzaminu

Moja propozycja

- **dwie** ”duże” **prace domowe** – 40%)
- **kolokwium/zerówka** – 60% (typowo: na ostatnich lub przedostatnich zajęciach)
- z powyższych wystawiam ocenę...
- ...komu się nie podoba, przystępuje do **egzaminu** (tu zasada **80/20**)
- na drugim terminie: również 80/20

Wprowadzenie do teorii gier

Plan na dziś

- co to jest teoria gier...
- ...i dlaczego jest fajna
- definicja gry
- definicja równowagi Nasha
- przegląd klasycznych gier

Teoria gier

- nauka o strategicznym działaniu w warunkach konfliktu (i kooperacji)
- matematyczne modele sytuacji strategicznych i analiza wyborów osób, firm, *graczy*
- formalny język opisu zjawisk i rozważań ekonomicznych, społecznych, politycznych
- narzędzia do analizy strategicznych sytuacji

”Ekonomiczne Noble” z TG

1994: John Nash, Reinhard Selten, John Harsanyi ”for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games.”

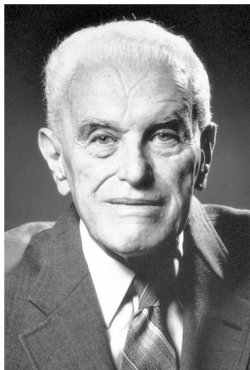


Photo from the Nobel Foundation archive.
John C. Harsanyi

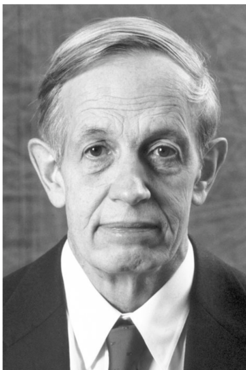


Photo from the Nobel Foundation archive.
John F. Nash Jr.



Photo from the Nobel Foundation archive.
Reinhard Selten

”Ekonomiczne Noble” z TG

2005: Aumann, Schelling ”for having enhanced our understanding of conflict and cooperation through game-theory analysis”



Photo: D. Porges

Robert J. Aumann

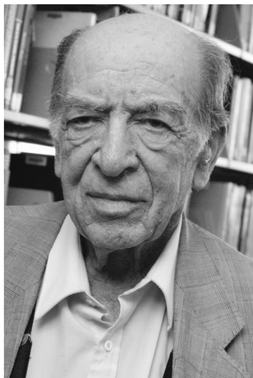


Photo: T. Zadig

Thomas C. Schelling

”Ekonomiczne Noble” z TG

2007: Hurwicz, Maskin, Myerson ”for having laid the foundations of mechanism design theory”



© University of Minnesota Photo: E. Ayoubzadeh

Leonid Hurwicz



© The Nobel Foundation Photo: U. Montan

Eric S. Maskin



© The Nobel Foundation Photo: U. Montan

Roger B. Myerson

”Ekonomiczne Noble”

2012: Roth, Shapley ”for the theory of stable allocations and the practice of market design”



© The Nobel Foundation. Photo: U. Montan

Alvin E. Roth



© The Nobel Foundation. Photo: U. Montan

Lloyd S. Shapley

'Economic Nobel Prizes' in Game Theory

2020: Milgrom, Wilson "for improvements to auction theory and inventions of new auction formats"



Paul R. Milgrom



Robert B. Wilson

Poza Noblami

- teoria alokacji: alokacja rezydentur medycznych w USA, nabór do liceum, matching nerek do transplantacji (Shapley, Shubik, potem Roth, Yaariv)
- predykcje polityczne (Mesquita & Roundell)
- aukcje:
    - częstotliwości radiowe (Milgrom)
    - uprawnień do emisji CO2
    - reklam Google/Facebooka
- decyzje biznesowe/strategiczne, zwłaszcza w warunkach niedoskonałej konkurencji (oligopole, fuzje, przejęcia)

Proste przykłady gier

Gra - definicja

Gra (w ujęciu formalnym) to:

1. gracze: strategiczni lub niestrategiczny gracz losowy tzw. Natura
2. strategie: zbiór możliwych dróg postępowania *w całej grze*
3. informacje dostępne graczom: (ważne zwłaszcza w grach sekwencyjnych)
4. wypłaty: monetarny lub 'użytecznościowy' wynik wyboru określonych strategii

Gra w postaci normalnej

Grą Γ (w postaci normalnej) nazwiemy zbiór:

1. $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$ zbiór graczy
2. $a_i \in A_i \neq \emptyset$ strategie gracza i
   $a = (a_1, \ldots, a_N)$ - profil strategii wszystkich graczy
   $A = A_1 \times \ldots A_N$ - zbiór strategii wszystkich graczy
   notacja: $a_{-i} = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_N)$ - profil strategii *wszystkich graczy poza i*
3. $u_i : A \to \mathbb{R}$ - funkcja wypłat
4. tradycyjnie wypłaty gry w postaci normalnej zapisujemy w macierzy (przykład zaraz)

Matching pennies

- Prosta gra o sumie zerowej
- Dwaj gracze wykładają jednocześnie monety
- jeśli monety ”pasują” (dwa orły, dwie reszki), wygrywa gracz 1, jeśli ”nie pasują” wygrywa gracz 2. Przegrywający płaci wygrywającemu 1 zł.
- *jak możemy opisać formalnie tę grę?*

		Gracz 2	
		O	R
Gracz 1	O	$(1,-1)$	$(-1,1)$
	R	$(-1,1)$	$(1,-1)$

- uwaga: w grze o sumie zerowej wystarczy podać wypłaty gracza 1:

		Gracz 2	
		O	R
Gracz 1	O	1	-1

Dylemat więźnia

- Dwaj wspólnicy w przestępstwie są oddzielnie przesłuchiwani
- Jeśli żaden nie sypnie, obaj: niski wyroki
- Jeśli jeden sypnie: program ochrony świadków; drugi: wysoka kara
- jeśli obaj sypną: obaj wysokie kary

		Więzień 2	
		Milczeć	Sypać
Więzień 1	Milczeć	$(-1, -1)$	$(-8, 0)$
	Sypać	$(0, -8)$	$(-5, -5)$

- *czy potrafimy przewidzieć co się tu stanie?*

Strategie zdominowane

		Więzień 2	
		Milczeć	Sypać
Więzień 1	Milczeć	$(-1, -1)$	$(-8, 0)$
	Sypać	$(0, -8)$	$(-5, -5)$

- Strategia 'Sypać' jest lepsza niż 'Milczeć' dla *każdego* wyboru przeciwnika!
- formalnie: (dla gracza i) a_i' jest **ściśle zdominowana** przez a_i jeśli:

$$u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i}) \forall a_{-i}$$

- intuicyjnie: strategie zdominowane nie są wybierane

Wojna płci/Bach i Strawinski

- Mąż i żona chcą razem wyjść
- mąż woli iść do (O)pery, żona na (M)ecz
- ...ale przede wszystkim: chcą iść razem

		Mąż	
		Opera	Mecz
Żona	Opera	$(1, 2)$	$(0, 0)$
	Mecz	$(0, 0)$	$(2, 1)$

- *brak strategii zdominowanych... co się stanie?*

Równowaga Nasha

- John ”Piękny umysł” Nash, 1951
- równowagą Nasha (NE) jest **profil strategii** taki, że żadnemu graczowi nie opłaca się indywidualnie zmienić swojej strategii *pod warunkiem, że inni nie zmieniają swoich*
- ’punkt stały’, warunek stabilności
- najbardziej wpływowa koncepcja w teorii gier – będziemy wracać wielokrotnie!

Definicja (NE)
$(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_N^*)$ *jest równowagą Nasha (w strategiach czystych) jeśli:*

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*) \ \forall a_i \in A_i$$

Wojna płci recap

		Mąż: Opera	Mąż: Mecz
Żona	Opera	$(1, 2)$	$(0, 0)$
	Mecz	$(0, 0)$	$(2, 1)$

- jakie są tu równowagi Nasha (w strategiach czystych)?

Polowanie na jelenia

- Artemis i Kalliope idą na polowanie
- każda z nich może polować na zająca (łatwa zdobycz) albo na jelenia (wymaga współpracy)
- jeśli obie wybiorą jelenia, dostają dużą wypłatę
- jeśli tylko jedna z nich, nie uda jej się upolować (wypłata 0).
- zając jest bezpieczną opcją

		Kalliope	
		Jeleń	Zając
Artemis	Jeleń	$(9, 9)$	$(0, 7)$
	Zając	$(7, 0)$	$(6, 6)$

Polowanie na jelenia

- jakie są równowagi Nasha tej gry?
- pomyśl o przykładach gier koorydnacji:
    - wspólne wiosłowanie (albo współpraca dwóch firm)
    - wspólne podanie do dziekana o zmianę wykładowcy z WTG
    - kto przyjdzie pierwszy na przyjęcie

Dylemat więźnia - powracamy!

- projekt z WTG robiony w parach
- student może podjąć Duży lub Mały wysiłek

		Bartosz	
		Duży	Mały
Anna	Duży	$(3, 3)$	$(0, 4)$
	Mały	$(4, 0)$	$(1, 1)$

- jakie są równowagi Nasha?

Dylemat więźnia

- prawdopodobnie najważniejsza gra dzisiejszego wykładu
- ważne własności: **dominacja**, jedyna (i ’mocna’) równowaga
- ważne wyjaśnienie obserwowanych fenomenów:
    - zanieczyszczenie powietrza
    - katastrofa klimatyczna
    - ’tragedia wspólnego pastwiska’ – wrócimy do tego!

Dominacja a NE

- ściśle zdominowane strategie *nigdy nie wchodzą* do równowag Nasha
- dlaczego?
    - srategia a_i^* w NE są *optymalna* (przy zadanym profilu a_{-i}^* tj. jest nie gorsza od *każdej innej*
    - jeśli a_i^* by była ściśle zdominowana przez pewne a_i, to dominacja zachodziłaby dla dowolnego profilu a_{-i}, w szczególności a_{-i}^*
    - to przeczy optymalności w NE
- uwaga: to dotyczy wyłącznie *ścisłej* dominacji. Istnieje też słaba dominacja - te strategie mogę być częścią NE!

Gra w cykora

- dwaj kierowcy jadą ’na siebie’ prostą drogą
- jeśli żaden nie ustąpi – zderzą się; jeśli ustąpi jeden – zostanie on ochrzczony ’cykorem’ (strata wizerunku); jeśli ustąpią obaj – żaden nie okaże się gorszy
- zob. *Buntownik bez powodu (1955)*

		Kierowca 2	
		Skręcić	Jechać prosto
Kierowca 1	Skręcić	$(0, 0)$	$(-4, 4)$
	Jechać prosto	$(4, -4)$	$(-10, -10)$

- gra **antykoordynacyjna**
- jakie są równowagi Nasha?

Gołąb–jastrząb (wariacja cykora)

- dwa zwierzęta rywalizują o ograniczone zasoby
- zwierzę może walczyć ('jastrząb') albo ustąpić ('gołąb')
- dwa gołębie dzielą się zasobem, dwa jastrzębie walczą (koszt walki $C \geq V$)

		2: Gołąb	2: Jastrząb
2	Gołąb	$(\frac{V}{2}, \frac{V}{2})$	$(0, V)$
2	Jastrząb	$(V, 0)$	$(\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2})$

- jakie są równowagi Nasha?
- załóżmy, że $C < V$. Jaka to gra?

Gołąb–jastrząb (wariacja cykora)

- dwa zwierzęta rywalizują o ograniczone zasoby
- zwierzę może walczyć ('jastrząb') albo ustąpić ('gołąb')
- dwa gołębie dzielą się zasobem, dwa jastrzębie walczą (koszt walki $C \geq V$)

		2: Gołąb	2: Jastrząb
2	Gołąb	$(\frac{V}{2}, \frac{V}{2})$	$(0, V)$
	Jastrząb	$(V, 0)$	$(\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2})$

- jakie są równowagi Nasha?
- załóżmy, że $C < V$. Jaka to gra?

Duopole

Duopol Cournota

- dwie firmy wybierają jednocześnie ilość produktu wprowadzanego na rynek q_i dla $i = 1, 2$; produkcja jednej jednostki produktu kosztuje c
- odwrócona funkcja popytu: $p(Q)$ malejąca
- przyjmiemy $p(Q) = a - bQ$, gdzie Q to całkowita ilość produktu na rynku
- zysk firmy i:

$$\pi(q_i) = p(Q) \cdot q_i - cq_i$$

- firmy biorą pod uwagę swój wpływ na cenę
- jaka jest NE?

Duopol Cournota

- optymalna produkcja:

$$q_i = \frac{a-c}{3b} \Rightarrow Q = \frac{2(a-c)}{3b}$$

- a ile wynosiłaby produkcja monopolisty?
- produkcja monopolisty:

$$Q = \frac{a-c}{2b}$$

- w modelu Cournota firmy produkują *więcej* niż monopolista, ale mają *mniejszy* zysk

Duopol Stackelberga

- dwie firmy wybierają wielkość produkcji…
- …ale tym razem sekwencyjnie!
- pierwsza to przywódca, druga to naśladowca
- weźmy identyczne oznaczenia: c to koszt produkcji jednostki, $p(Q) = a - bQ$ to (liniowa) odwrócona funkcja popytu
- czym się różni ta sytuacja od poprzedniej?
- jakie są teraz **strategie** gracza nr 2?

Duopol Stackelberga: NE

- optymalny wybór lidera:

$$q_1 = \frac{a - c}{2b}$$

- optymalny wybór naśladowcy:

$$q_2 = \frac{a - c}{4b}$$

- lider produkuje tyle, co monopolista, ale ze względu na naśladowcę zarabia mniej niż monopolista (cena i zysk są niższe)
- naśladowca produkuje mniej niż lider (w modelu liniowym dwukrotnie mniej) i mniej niż w równowadze Cournota

Trochę drobiazgów formalnych

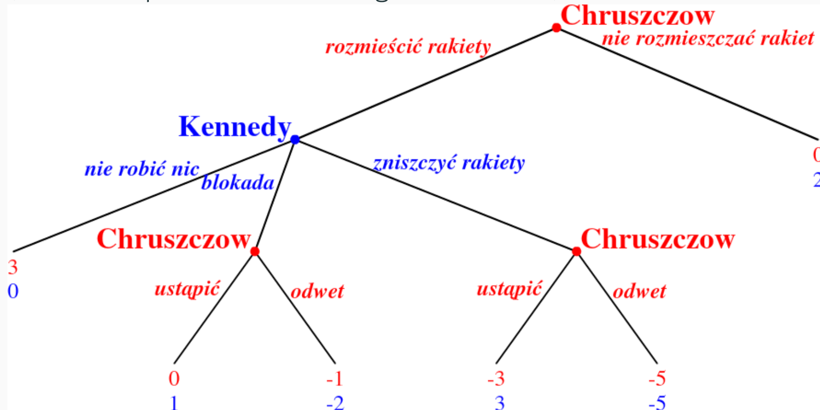
- czy znaleziona NE w modelu Cournota jest jedyna? *tak*
- czy znaleziona NE w modelu Stackelberga jest jedyna? *nie* ale jest jedyną o ”dobrych własnościach” (SPNE)
    - inna NE (ale nie SPNE): firma 1 produkuje wielkość Cournota, firma 2 produkuje wielkość Cournota *bez względu na produkcję firmy 1*

Postać strategiczna i rozwinięta gry

Uproszczony Kubański kryzys rakietowy z 1963 r. (przykład zaadaptowany z ”Teorii gier” Straffina)

- gracze: USA pod prezydenturą Kennedy’ego vs. ZSRR w reprezentacji Chruszczowa
- Chruszczow decyduje, czy zamieścić na Kubie pociski rakietowe
- Jeśli to się stanie, Kennedy może (1) nie robić nic, (2) ogłosić blokadę Kuby, (3) zniszczyć rakiety
- Chruszczow może następnie (1) ustąpić albo (2) przeprowadzić odwet

(Gra zaadaptowana z ”Teorii gier” Straffina)



Rozwiązanie - indukcja wsteczna

- rozwiązujemy grę ”od tyłu”, wybierając optymalnie
- ostateczny wynik: *jednoznaczny*
- ...”zupełnie przypadkiem” jest to NE
- a konkretniej: **doskonała równowaga Nasha** w podgrach

Doskonała równowaga Nasha w podgrach (SPNE)

Definicja (SPNE)
Doskonałą równowagą Nasha w podgrach nazwiemy profil, który wyznacza równowagę Nasha w każdej podgrze pierwotnej gry.

A co to jest podgra?

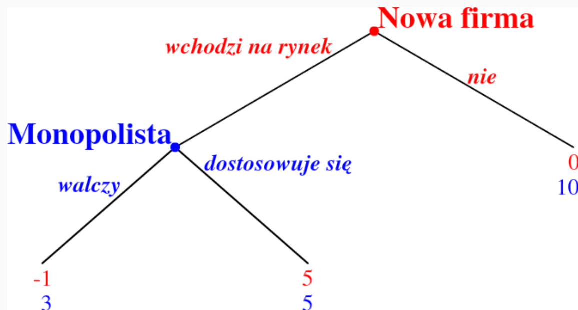
- wycinek drzewa, którego wierzchołek w jednopunktowym zbiorze informacyjnym
- wszyscy 'potomkowie' danego wierzchołka z podgry należą do podgry
- podgra nie 'przecina' zbiorów informacyjnych

Metoda zapisu

- tzw. postać rozwinięta (drzewko) gry
- służy nie tylko do gier sekwencyjnych! (trzeba tylko pooznaczać *zbiory informacyjne*)
- można (i trzeba umieć!) przechodzić z macierzy na ”drzewka” i odwrotnie
- ...więc dla sportu to zrobimy

Prostszy przykład

Wejście nowej firmy na dotychczas zmonopolizowany rynek



- jaka jest macierz gry?
- jakie są wszystkie NE?
- jaka jest SPNE?

Strategie mieszane

Wróćmy do podstaw...

Strzelanie karnych (wersja uproszczona)

- Strzelec celuje w prawą stronę bramki lub lewą.
- Bramkarz rzuca się na prawą stronę lub lewą. Dla uproszczenia przyjmiemy, że jeśli rzuci się 'we właściwą', zawsze złapie piłkę.

		Bramkarz P	Bramkarz L
Strzelec	P	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
Strzelec	L	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

- jaka to gra? (już była na tym wykładzie...)
- jaką strategię tu grać?

Zapytajmy piłkarzy!

- `thestatszone.com` kliknij tu do oryginalnego artykułu
- strategia bramkarza:

Choice of Direction		
L	C	R
49.3%	3.0%	47.7%

Choice of Direction vs Right Footed		
L	C	R
52.2%	2.9%	44.9%

Choice of Direction vs Left Footed		
L	C	R
38.2%	3.4%	58.4%

- strategia strzelca:

Overall Shooting Heat Map			
5.5%	4.4%	3.9%	5.3%
10.4%	7.1%	6.5%	11.1%
16.4%	7.8%	8.8%	12.9%

Right Footed Shooting Heat Map			
6.4%	4.9%	4.1%	5.5%
10.1%	6.7%	7.0%	11.0%
17.7%	6.4%	8.7%	11.6%

Left Footed Shooting Heat Map			
2.2%	2.2%	3.4%	4.5%
11.2%	9.0%	4.5%	11.2%
11.2%	13.5%	9.0%	18.0%

Overall Shooting Heat Map				
3.5%	5.3%	3.5%	3.5%	3.2%
6.9%	8.8%	4.1%	8.8%	6.7%
11.5%	11.8%	2.1%	12.7%	7.8%

Right Footed Shooting Heat Map				
3.8%	6.4%	4.1%	3.2%	3.2%
5.8%	9.6%	4.1%	8.4%	7.2%
13.6%	9.3%	2.0%	12.5%	7.0%

Left Footed Shooting Heat Map				
2.2%	1.1%	1.1%	4.5%	3.4%
11.2%	5.6%	4.5%	10.1%	4.5%
3.4%	21.3%	2.2%	13.5%	11.2%

Matching pennies c.d.

		Bramkarz	
		P	L
Strzelec	P	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
	L	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

- strategia ’rzuć monetą, a potem zagraj L jeśli O i P jeśli R’ jest całkiem niezła przeciwko racjonalnemu przeciwnikowi – daje średnią wypłatę 0.
- jak taką strategię zapisać?

Strategia mieszana

- Strategia mieszana to rozkład prawdpodobienstwa na zbiorze strategii czystych.
- jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ to strategie czyste, to strategię mieszaną możemy zapisać jako $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in [0, 1]^k$, gdzie $p_i = P(\text{gracz wybiera strategię} a_i)$ (oczywiście $\sum_i p_i = 1$)
- w szczególności, każda strategia czysta może być zapisana jako mieszana, np. a_1 może być zapisana jako $(1, 0, \ldots, 0)$.
- zbiór strategii mieszanych oznacza się (najczęściej) $\Delta(A)$

Uwaga – silne założenia!

- w analizie strategii mieszanych przyjmujemy ”średnią” wypłatę z danej strategii
- ...formalniej: wartość oczekiwaną
- to ”nie wprost” zakłada pewną formę neutralności względem ryzyka
- ...chociaż nie jest aż tak silne, jak się wydaje – przy założeniu racjonalności przeciwnika

Uwaga – silne założenia!

- w analizie strategii mieszanych przyjmujemy ”średnią” wypłatę z danej strategii
- ...formalniej: wartość oczekiwaną
- innymi słowy, przyjmujemy tu (znaną z mikroekonomii) teorię oczekiwanej użyteczności

Formalna definicja

Definicja
Niech $(N, (A_i), (u_i))$ *będzie grą. Rozszerzeniem tej gry o mieszane strategie będzie* $(N, \Delta(A_i), (U_i))$*, gdzie dla zadanego profilu strategii mieszanych* $\alpha \in \times_j \Delta(A_j)$ *funkcja* U_i *wyznacza wartość oczekiwaną z* u_i *indukowaną przez* α

Definicja
Równowagą Nasha w strategiach mieszanych gry w postaci strategicznej jest jest równowaga Nasha rozszerzenia tej gry.

Ważne twierdzenie

Twierdzenie (Nasha o istnieniu)
Każda skończona* gra strategiczna ma (co najmniej jedną) równowagę Nasha, być może w strategiach mieszanych).

* skończona = o skończonej liczbie graczy, w których każdy ma do wyboru skończenie wiele strategii czystych;

(da się uogólnić na ∞ strategie ze zbioru zwartego)

Matching pennies - MSNE

		Bramkarz: P	L
Strzelec	P	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
	L	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

Profil $(1/2, 1/2), (1/2, 1/2)$ jest (jedyną) równowagą Nasha tej gry.

Strategie mieszane w innych klasycznych grach

- Wojna płci

		Mąż	
		Opera	Mecz
Żona	Opera	$(1, 2)$	$(0, 0)$
	Mecz	$(0, 0)$	$(2, 1)$

- jakie były NE w czystych?
- czy jest jakaś mieszana?

Strategie mieszane w innych klasycznych grach

		Mąż: Opera	Mąż: Mecz
Żona	Opera	$(1,2)$	$(0,0)$
	Mecz	$(0,0)$	$(2,1)$

Efektywność: załóżmy, że gracze grają strategię mieszaną:

- jak często się spotykają?
- jaka jest ich oczekiwana wypłata?

Strategie mieszane c.s.

- Polowanie na jelenia

		Kalliope: Jeleń	Kalliope: Zając
Artemis	Jeleń	$(9, 9)$	$(0, 7)$
Artemis	Zając	$(7, 0)$	$(6, 6)$

- jaka jest równowaga w strategiach mieszanych?

Równowagi mieszane c.d.

- Dylemat więźnia (wersja z projektem w parach)

		Bartosz	
		Duży	Mały
Anna	Duży	$(3,3)$	$(0,4)$
	Mały	$(4,0)$	$(1,1)$

- jaka jest równowaga w strategiach mieszanych?

Równowagi mieszane c.d.

- Gra w cykora

		Kierowca 2	
		Skręcić	Jechać prosto
Kierowca 1	Skręcić	$(0, 0)$	$(-4, 4)$
	Jechać prosto	$(4, -4)$	$(-10, -10)$

- jakie są równowagi w strategiach mieszanych?

Równowagi – ogólny algorytm (dla gier 2x2)

- w grze 2-osobowej o 2 strategich arbitralną strategię gracza 1 da się zapisać z użyciem $p \in [0, 1]$ (prawdopodobieństwo wyboru pierwszej strategii); dla gracza 2 q
- w układzie współrzędnych p, q rysujemy funkcje najlepszych odpowiedzi obu graczy
    - na ogół są to ’schodki’
    - ważne: kierunek rysowania!
- punkty przecięcia $BR_1(q)$ i $BR_2(p)$ to – z definicji – równowaga Nasha
    - Równowaga Nasha - profil strategii, które są najlepszymi odpowiedziami na siebie

Mieszana dominacja

- rozważmy poniższą grę

		2	
		A	B
1	A	1, 1	1, 0
	B	3, 0	0, 3
	C	0, 1	4, 1

- co możemy powiedzieć o strategii *A*?
- jak to sformalizować? przypomnienie: ściśle zdominowane strategie nie wchodzą w skład NE.

Gry z niepewnością

Niepewność w grze

- gry jednoczesne (gry z niedoskonałą, ale kompletną informacją) np. poker, bitwa płci
- posunięcia losowe (gry ”przeciwko Naturze”)
- … potem: gry z niekompletną informacją

Najprostsza gra przeciwko naturze

Rybacy na Jamajce (Straffin)

- załogi rybaków na Jamajce muszą zdecydować o ustawieniu koszy do łowienia
- na łowiskach zewnętrznych można złowić węcej ryb…
- …ale bywają tam silne prądy, które niszczą sieci (nieobserwowalne z poziomu wody)
- …dodatkowo, na łowiska zewnętrzne potrzebne są lepsze łodzie
- są trzy strategie: ustawić wszystkie kosze na łowiskach wewętrznych, wszystkie na zewnętrznych albo część na wewnętrznych, część na zewnętrznych

Rybacy - analiza teoriogrowa

- Wypłaty (wynikające z analizy ekonomicznej)

		Natura	
		aktywne	nieaktywne
Rybacy	wewnętrzna	17.3	11.5
	pośrednia	5.2	17
	zewnętrzna	-4.4	20.6

- jaką strategię powinni zastosować rybacy?

Rybacy - analiza c.d.

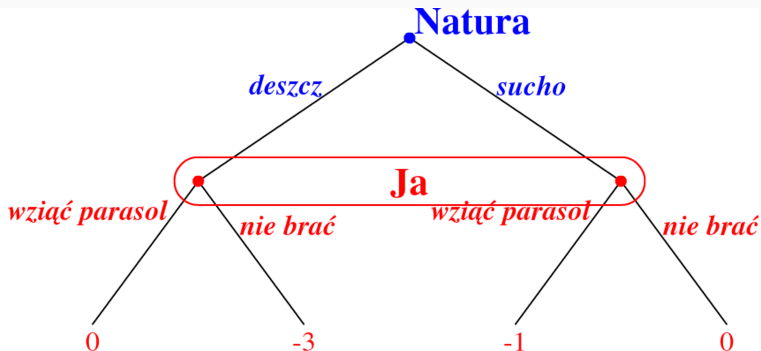
- obserwacje Davenporta: prądy morskie są aktywne przez 1/4 roku
- Rybacy *nigdy* nie stosowali strategii zewnętrznej: w 69% stosowali strategię wewnętrzną, w 31% pośrednią
- czy jest to zgodne z podejściem maksymalizacji oczekiwanej tj. (średniej) wypłaty?
- jak to wytłumaczyć?
- ogólnie: duży dział teorii gier zajmujący się *tylko tym zagadnieniem* (strategie minimaksowe, maksimaksowe, SEU)
- ...ale my (na WTG) zostaniemy przy EU!

Gry z posunięciem losowym

Rozszerzenie gry o *niestrategicznego* ”gracza” zwanego Naturą

- Natura nie wybiera strategii...
- ... ale zadaje rozkład prawdopodobieństwa na wypłatach
- ... w analizie - średnia wypłata

Czy wziąć parasol?



Biznesowa gra z niepewnością

Rynek muzyczny

- Zeus Music jest liderem rynku w produkcji sprzętu audio
- Athena Acoustics jest firmą mniejszą, ale cenioną za jakość produktów
- Firmy opracowały nowy ”heksafoniczny” dźwiękowy; czynnikiem niepewności jest wielkość rynku na nowy system
    - rynek mały (24 mln zysku)
    - rynek duży (40 mln zysku)
- Firmy muszą zdecydować, czy wypuścić produkt najwyższej jakości dla audiofilów (lepszy na mały rynek), czy też wyprodukować prpdukt tańszy, dla szerokiego odbiorcy

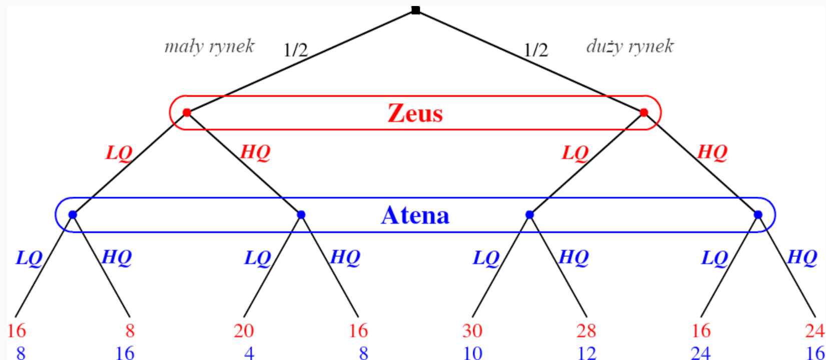
Biznesowa gra z niepewnością

Rynek muzyczny

- Zeus Music jest liderem rynku w produkcji sprzętu audio
- Atena Acoustics jest firmą mniejszą, ale cenioną za jakość produktów
- Firmy opracowały nowy ”heksafoniczny” dźwiękowy; czynnikiem niepewności jest wielkość rynku na nowy system
    - rynek mały (24 mln zysku)
    - rynek duży (40 mln zysku)
- Firmy muszą zdecydować, czy wypuścić produkt najwyższej jakości dla audiofilów (na mały rynek), czy też wyprodukować produkt tańszy, dla szerokiego odbiorcy

Informacja - wersja 1

- Zeus Music i Atena Acoustics podejmują decyzje równocześnie (lub: ukrywają swoje decyzje)



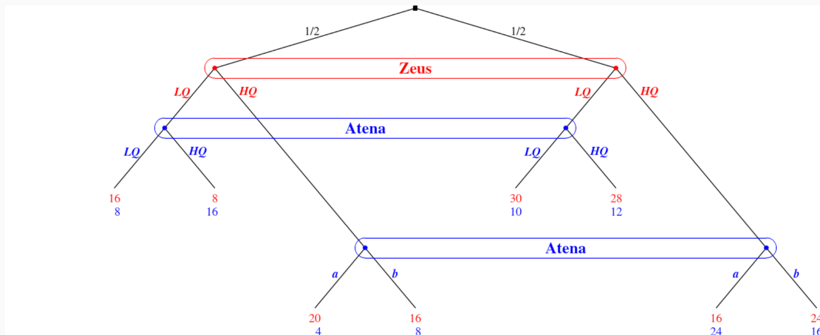
Postać macierzowa

Zeus \ Atena	LQ	HQ
LQ	23, 9	18, 14
HQ	18, 14	20, 12

- jakie są NE tej gry?

Informacja - wersja 2

- Zeus Music jako lider podejmuje decyzję pierwszy; Atena się dostosowuje

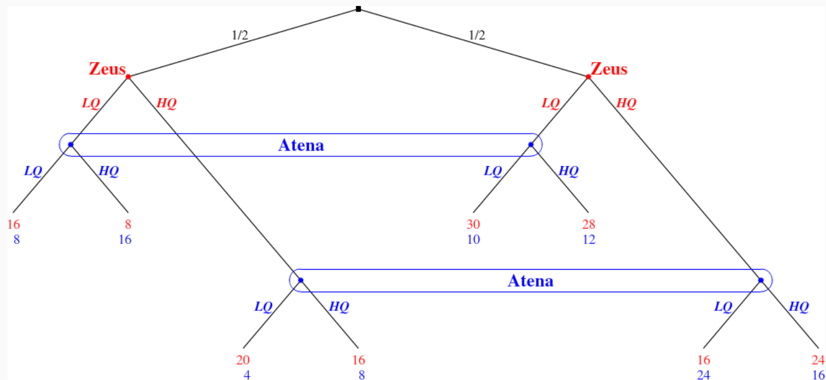


Postać macierzowa

Zeus \ Atena	LQ,LQ	LQ,HQ	HQ,LQ	HQ,HQ
LQ	9 23	9 23	14 18	14 18
HQ	14 18	12 20	14 18	12 20

- jakie są NE tej gry?

- Zeus Music przeprowadza badanie rynku



Jak zapisać grę w postaci macierzowej?

- Natura zadaje rozkłady prawdopodobieństwa...
- ...więc liczymy wartość oczekiwaną zgodną z rozkładem
- *ważne:* punkt widzenia **ex-ante** tj. Zeus i Atena patrzą na hipotetyczne (oczekiwane) wypłaty zanim podejmą jakiekolwiek decyzje!

Jak zapisać grę w postaci macierzowej? c.d.

- Zeus rozważa strategię LQ, LQ
    - ...robi to przed badaniem rynku!
    - jak już zbada, będzie znał wypłaty...
    - ...ale na moment definiowania strategii bierze wartość oczekiwaną (strategia = ’podręcznik użytkownika’ tj. opis działania w każdej sytuacji)

Postać macierzowa

Zeus \ Atena	LQ,LQ	LQ,HQ	HQ,LQ	HQ,HQ
LQ,LQ	23, 9	23, 9	18, 14	18, 14
LQ,HQ	16, 16	20, 12	12, 20	16, 16
HQ,LQ	25, 7	23, 9	24, 8	22, 10
HQ,HQ	18, 14	20, 12	18, 14	20, 12

- jaka jest optymalna strategia Ateny?
- czemu się zmieniła?

Recap

Gry z prawdopodobieństwem:

- Analizujemy wypłaty w każdym z możliwych stanów świata
- liczymy wartosć oczekiwaną
- **z punktu widzenia ”momentu zero”**, a więc przed rozwiązaniem jakiejkolwiek niepewności!

Gry bayesowskie

Zmodyfikowana wojna płci

Mąż i żona wybierają Mecz lub Operę

- niepewność: mąż mógł mieć normalny lub stresujący dzień w pracy
- jeśli normalny – chce spędzić wieczór z żoną
- jeśli stresujący – woli go spędzić sam
- żona nie wie, jaki mąż miał dzień (nie ma komórek...)
- czy to nadal gra?

Koncepcyjnie

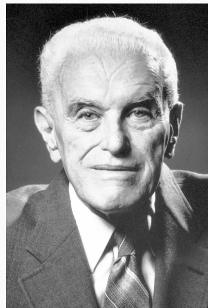
Naruszamy podstawowe założenie analizy gier:

- kompletna informacja: gracze znają wypłaty (bodźce) innych graczy
- tu: niespełnione
- jak sobie z tym poradzić?

Gry z niekompletną informacją

Pomysł Johna Harsanyiego (Nobel 1994):

- skonstruować ”podobną” grę
- gracze mogą być różnych typów (np. typ 1: zrelaksowany mąż, typ 2: zestresowany mąż)
- każdy typ to osobny strategiczny ”gracz” (który gra optymalnie)
- Typ gracza jest losowy – wybiera go na początku Natura
- gra z niekompletną informacją $\sim$ gra z kompletną informacją



Gra bayesowska formalnie

Definicja
Bayesowską grą nazwiemy $(N, \{S_i\}, \{\Theta_i\}, \{u_i\}, p)$*, takie, że:*

- N *to zbiór graczy*
- S_i *to zbiór strategii gracza* i
- $t_i \in \Theta_i$ *to typy gracza* i
- $u_i(s_1, \ldots, s_N, t_1, \ldots, t_N)$ *to wypłata gracza* i
- $P(t_1, ..., t_N)$ *to rozkład prawdopodobieństwa (a priori) możliwych typów graczy*

Skąd ten Bayes?

- rozkład możliwych typów P jest znany wszystkim graczom (*common knowledge*)
- w szczególności, typy mogą być dowolnie (nie)skorelowane
- jeśli gracz i jest typu t_i, to potrafi wyznaczyć rozkład warunkowy $P(.|t_i)$ - tzw. przekonanie (*belief*
- rozkład ten jest liczony zgodnie z regułą Bayesa

Bayesowska równowaga Nasha

Profil strategii *dla każdego typu gracza*, taki, że:

- żaden z (typów) graczy nie chce zmienić swojej strategii…
- …pod warunkiem swoich przekonań nt. typów innych graczy i ich optymalnych strategii

BNE formalnie

Bayesowską równowagą Nasha (w strategiach czystych(nazwiemy profil strategii s taki, że dla każdego gracza i oraz typu t_i zachodzi:

$$s_i(t_i) \in \arg\max_{s'_i \in S_i} \sum P(t_{-i}|t_i) u_i(s'_i, s_{-i}, t_i, t_{-i}).$$

BNE formalnie

Bayesowską równowagą Nasha (w strategiach czystych(nazwiemy profil strategii s taki, że dla każdego gracza i oraz typu t_i zachodzi:

$$s_i(t_i) \in \arg\max_{s'_i \in S_i} \sum P(t_{-i}|t_i) u_i(s'_i, s_{-i}, t_i, t_{-i}).$$

Bayesowska wojna płci

- z prawdopodobieństwem 1/2 gracze grają w klasyczną BoS

		Mąż	
		Opera	Mecz
Żona	Opera	$(1, 2)$	$(0, 0)$
	Mecz	$(0, 0)$	$(2, 1)$

-
- z prawdopodobieństwem 1/2 gracze grają przesuniętą BoS

		Mąż	
		Opera	Mecz
Żona	Opera	$(1, 0)$	$(0, 1)$
	Mecz	$(0, 2)$	$(2, 0)$

Bayesowska wojna płci

- Mąż ma 2 typy, a więc 4 strategie: $(O, O), (O, M), (M, O), (M, M)$

		Mąż			
		OO	OM	MO	MM
Żona	O	(1, 1)	(1/2, 3/2)	(1/2, 0)	(0, 1/2)
	M	(0, 1)	(1, 0)	(1, 3/2)	(2, 1/2)

- jaka jest NE tej gry?

Najprostsza aukcja z niekompletną informacją

- *gra z continuum typów*
- dwóch graczy chce kupić produkt
- każdy z nich wycenia ten produkt na pewne $v_i \sim Unif[0, 1]$ (wycena = typ gracza)
- strategia to pewne p_i (cena ofertowa)
- wypłata: $v_i - p_i$ jeśli gracz i wygrał aukcję, 0 w p.p.

Mechanizm aukcyjny nr 1

- aukcja drugiej ceny:
  - dla uproszczenia: załóżmy, że maksymalne oferty składane są w kopertach
  - aukcję wygrywa gracz z najwyższym s_i
  - ale płaci drugie co do wielkości s_j
    (uwaga: tu jest to również ostatnie, ale przy N graczy jest nadal *drugie*)
  - Allegro, eBay itd.
- jak tu wyglądają strategie (ex-ante)?
- czy potrafimy zgadnąć optymalną strategię?

Mechanizm aukcyjny nr 1

- rozważmy strategię ”licytuję moją wycenę” $s_i(v_i) = v_i$
- strategia $s_i = v_i$ (słabo) dominuje nad innymi:
  - jeśli przegrywam: (słabo) nie chcę licytować mniej, bo i tak nie wygram; nie chcę licytować więcej, bo dostanę ujemny zysk;
  - jeśli wygrywam: nie chcę licytować więcej, bo zysk będzie mniejszy; nie chcę licytować mniej, bo istnieje dodatnie prawd., że przegram;
- w aukcji II ceny strategia $s_i = v_i$ (słabo) dominuje nad innymi
- profil $(s_1, s_2) = (v_1, v_2)$ jest Bayesowską równowagą Nasha

Mechanizm aukcyjny nr 2

- aukcja pierwszej ceny:
  - dla uproszczenia: załóżmy, że maksymalne oferty składane są w kopertach
  - aukcję wygrywa gracz z najwyższym s_i
  - …i płaci tyle, ile wylicytował
- czy potrafimy zgadnąć optymalną strategię?

Mechanizm aukcyjny nr 2

- rozważmy strategię ”licytuję moją wycenę” $s_i = v_i$
- ta strategia przynosi zerowy zysk...
- ...więc wolę licytować $s_i < v_i$...
- ...ale ile dokładnie, by zrównoważyć potencjalne zyski i ryzyko niewygrania?

Aukcja pierwszej ceny

- generalnie dużo trudniejsza analiza!
- ograniczymy się do równowag symetrycznych (a więc każdy z graczy *dla danego* v_i wybiera *to samo* s_i
- co więcej, ograniczymy się do strategii liniowych $s_i(v_i) = \theta v_i$ dla pewnego $\theta \in \mathbb{R}$

Aukcja pierwszej ceny - rozwiązanie

- założmy, że gracz 1 wierzy, że gracz 2 wybiera $s_2 = \theta v_2$ dla pewnego θ
- gracz 1 wybiera s_1^* (jako funkcję v_1) optymalizując:

$$\mathbb{E}zysk(s_1) = (v_1 - s_1) \cdot \mathbb{P}(wygrana)$$

$$\mathbb{P}(wygrana) = \mathbb{P}(s_2 \leq s_1) = \mathbb{P}(\theta v_2 \leq s_1) = \mathbb{P}\left(v_2 \leq \frac{s_1}{\theta}\right) = \frac{s_1}{\theta}$$

$$\mathbb{E}zysk(s_1) = (v_1 - s_1) \cdot \frac{s_1}{\theta}$$

$$\Rightarrow \mathbf{s^* = \frac{1}{2}v_1} \quad \left(\text{ogólniej: } s^* = \frac{N-1}{N}v_1\right)$$

- profil $\left(\frac{v_1}{2}, \frac{v_1}{2}\right)$ jest BNE!

Gry powtarzane

Dylemat więźnia

			Bartek	
			D	M
Ania	D		$(3, 3)$	$(1, 4)$
	M		$(4, 1)$	$(2, 2)$

- recap: jedyna NE jest nieefektywna
- wiele sytuacji społecznych wygląda podobnie…
- …czemu nie zawsze jest tak źle?

Pokonanie ”Dylematu więźnia”

- rozszerzenia, meta–gry
- eksperymenty, ograniczona racjonalność
- powtarzanie $\leftarrow$ temat na dziś

Dylemat więźnia powtarzany

- założmy, że gracze grają w DW dwukrotnie
- jakie są równowagi (SPNE)?
- co się dzieje dla gry powtarzanej N razy?
- efekt domina

Alternatywa

- gra powtarzana w nieskończoność…
- …lub niepewność co do liczby gier
- *brak możliwości indukcji wstecznej*
- $\rightarrow$ możliwe nowe równowagi
- trzeba doprecyzować definicje!

Wypłaty w grach nieskończonych

		Bartek D	Bartek M
Ania	D	$(3, 3)$	$(1, 4)$
	M	$(4, 1)$	$(2, 2)$

- załóżmy, że Ania gra zawsze *D*, a Bartek zawsze *M*. Jaka jest ich wypłata z nieskończenie wielu gier?
- wprowadzamy **stopę dyskonta** $\delta < 1$
- szereg geometryczny o **skończonej** sumie $\Rightarrow$ można porównywać wypłaty
- *alternatywnie:* $\delta =$*prawdopodobieństwo zagrania kolejnej gry*

Równowagi w grach nieskończonych

- dla gier skończonych mamy dobrze określone SPNE
- jak tu je badać?
    - nieskończenie wiele strategii i podgier
    - analiza w ogólnym przypadku niemożliwa
- na szczęście (dzięki dyskontowaniu): spełnione są założenia *zasady jednorazowego odstępstwa*

Zasada jednorazowego odstępstwa

- **jednorazowe odstępstwo** (*one-shot deviation*) od strategii s w podgrze jest strategią, która różni się od s tylko jedną akcją dla początkowego wierzchołka tej podgry
- **zasada jednorazowego odstępstwa** (*one-shot deviation principle*): (w grze spełniającej pewne założenia) Profil strategii jest SPNE wtedy i tylko wtedy, gdy żaden z graczy nie posiada zyskownego dla siebie jednorazowego odstępstwa w żadnej podgrze.
- zasada ta nie zachodzi w ogólnych nieskończonych grach
- ale w prostych grach iterowanych z $\delta < 1$ tak!

Zasada jednorazowego odstępstwa

- **jednorazowe odstępstwo** (*one-shot deviation*) od strategii s w podgrze jest strategią, która różni się od s tylko jedną akcją dla początkowego wierzchołka tej podgry
- **zasada jednorazowego odstępstwa** (*one-shot deviation principle*) profil strategii jest SPNE wtedy i tylko wtedy, gdy żaden z graczy nie posiada zyskownego dla siebie jednorazowego odstępstwa w żadnej podgrze.
- zasada ta nie zachodzi w ogólnych nieskończonych grach
- ale w prostych grach iterowanych z $\delta < 1$ tak!
- zasada pomaga nam sprawdzić, czy różne (ciekawe) profile są SPNE w grach iterowanych

Przykład - strategia odwetu

- rozważmy strategię: D w 1. rundzie oraz jeśli przeciwnik zagrał D we wszystkich poprzednich rundach; M w p.p.
- strategia ”kara za zdradę”
- załóżmy, że Ania i Bartek grają tę strategię $\rightarrow$ **czy (kiedy) to jest SPNE?**
- obserwacja: najlepszą odpowiedzią na D jest D
- najlepszą odpowiedzią na M jest M
- to zachodzi w każdej podgrze

Strategia odwetu - c.d.

-
- utrzymanie strategii ”odwet” da wypłatę:

$$3 + \delta 3 + \delta^2 3 + \ldots = 3\frac{1}{1-\delta}$$

- jednorazowe odstępstwo da (optymalnie) wypłatę:

$$4 + \delta 2 + \delta^2 2 + \ldots = 4 + 2\frac{\delta}{1-\delta}$$

- odstępstwo się nie opłaca, jeśli $\delta \geq 1/2$

Przykład - strategia odwetu

- rozważmy strategię: D w 1. rundzie oraz jeśli przeciwnik zagrał D we wszystkich poprzednich rundach; M w p.p.
- strategia "kara za zdradę"
- załóżmy, że Ania i Bartek grają tę strategię $\rightarrow$ **czy (kiedy) to jest SPNE?**
- obserwacja: najlepszą odpowiedzią na D jest D
- najlepszą odpowiedzią na M jest M
- to zachodzi w każdej podgrze

Strategia odwetu - c.d.

-
- utrzymanie strategii ”odwet” da wypłatę:

$$3 + \delta 3 + \delta^2 3 + \ldots = 3 \frac{1}{1-\delta}$$

- jednorazowe odstępstwo da (optymalnie) wypłatę:

$$4 + \delta 2 + \delta^2 2 + \ldots = 4 + 2 \frac{\delta}{1-\delta}$$

- odstępstwo się nie opłaca, jeśli $\delta \geq 1/2$
- profil $(odwet, odwet)$ jest SPNE (i ma ”dobre” wypłaty!)

Przykład - strategia wet-za-wet

- Tit-for-Tat (TFT)
- rozważmy strategię: D w 1. rundzie; w n-tej rundzie **to co przeciwnik zagrał w** $n-1$ rundzie
- strategia "ukaraj za zdradę raz, ale wróć do współpracy, jeśli okaże skruchę"
- załóżmy, że Ania i Bartek grają tę strategię $\rightarrow$ **czy (kiedy) to jest SPNE?**

Strategia wet-za-wet - c.d.

- utrzymanie strategii ”wet-za-wet” da wypłatę:

$$3 + \delta 3 + \delta^2 3 + \ldots = 3\frac{1}{1-\delta}$$

- odstępstwo i dalsze M da wypłatę:

$$4 + \delta 2 + \delta^2 2 + \ldots = 4 + 2\frac{\delta}{1-\delta}$$

- odstępstwo i ”skrucha” da wypłatę:

$$4 + \delta 1 + +\delta^2 3 + \ldots = 4 + \delta + 3\frac{\delta^2}{1-\delta}$$

- odstępstwo się nie opłaca, jeśli $\delta \geq 1/2$

Strategia wet-za-wet – one shot deviation

- *one-shot deviation z definicji* odstępstwo w jednym okresie i stara strategia w każdym następnym
- ”stara” czyli warunkowa
- jednorazowe odstępstwo: gram M
- ...a potem wracam do wet-za-wet (czyli to, co przeciwnik poprzednio)
- przeciwnik: utrzymuje wet-za-wet
- profil: $(M, D), (D, M), (M, D), (D, M)$ z wypłatami $4, 1, 4, 1, \ldots$
- wet-za-wet jest SPNE jeśli

$$\frac{3}{1-\delta} \geq \frac{4}{1-\delta^2} + \frac{\delta}{1-\delta^2}$$

$$\delta \geq \frac{1}{2}$$

Tit-for-tat – one shot deviation

ALE odchylenie musi być nieopłacalne w *każdej* podgrze

- zał., że jesteśmy w podgrze po pewnym (D, M)
- Ania 'powinna' wybrać M
- rozważmy odstępostwo Ani do D. To sprawi, że od następnej rundy gracze będą grali (D, D) do końca
- odchylenie **nie**opłacalne:

$$\frac{4}{1-\delta^2} + \frac{1\delta}{1-\delta^2} \geq \frac{3}{1-\delta}$$

$$\delta \leq \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ wet-za-wet **nie jest SPNE** – poza $\delta = \frac{1}{2}$

Strategia wet-za-wet - c.d.

- Dobre cechy wet-za-wet:
  - Przyjazna – zaczyna od kooperacji i nie zdradza jako pierwsza
  - Odwetowa – powinna zdecydowanie karać zdradę
  - Przebaczająca – po ukaraniu powinna być skłonna do dalszej kooperacji
  - Przejrzysta – jej decyzje spójne i łatwe do przewidzenia
- behawioralnie:
  - turniej Axelroda (1984)
  - Zwycięzca – Anatol Rapoport z wet-za-wet (TFT)
  - Axelrod opublikował wyniki i ogłosił drugi turniej (z próbą ’obalenia’ TFT)
  - W drugiej rundzie udział wzięło 62 specjalistów
  - … i znowu wygrał Rapoport z niezmienionym programem

Inne strategie

- czy (odwet,odwet) to jedyna SPNE?
- oczywiście nie!
- **ogólnie: w iterowanych grach jest mnóstwo SPNE**
- czy (zawsze M, zawsze M) jest SPNE? TAK
- czy (zawsze D, zawsze D) jest SPNE? NIE
- rozważmy *s*: *D* w nieparzystych i *M* w parzystych dopóki przeciwnik gra tak samo; stale *M* w p.p.
- czy (s, s) to SPNE?

Folk theorem

intuicja:
W grze powtarzalnej prawie każdy wynik (ciąg wypłat graczy) może być zrealizowany w pewnej SPNE, o ile czynnik dyskontowy jest dostatecznie duży. Prawie każdy = każdy między 'niekooperacyjną' wypłatą a 'kooperacyjną' wypłatą (u nas między 2 a 3).

Gry kooperacyjne

Konkurencja i kooperacja

- Gry niekooperacyjne:
    - brak wiążących kontraktów
    - fokus na indywidualnych bodźcach i wypłatach

  Gry kooperacyjne:
    - można zawierać wiążące kontrakty
    - zyski ze współpracy
    - i zagadnienie ich podziału

Gra kooperacyjna

- N - zbiór graczy
- 2^N: podzbiory możliwych koalicji z N
- $v: \ 2^N \to \mathbb{R}$ funkcja charakterystyczna gry;
- $v(S)$ wartość bycia w koalicji S $(v(\emptyset) = 0)$

Grą kooperacyjną nazwiemy parę $< N, v >$.

Przykład – podział dolara

- $N = 3$ kolegów dostanie dolara, jeśli zdecydują (w głosowaniu większościowym), jak go podzielą
- $v(1) = v(2) = v(3) = 0$
- $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 1$

Przykład – gra w rękawiczki

- $N = 3$ graczy; 1,2 mają prawą rękawiczkę, 3 ma lewą;
- rękawiczki mają sens w parach: para $\{L, R\}$ jest warta 10 zł, pojedyncze są bezwartościowe
- $v(1) = v(2) = v(3) = v(\{1, 2\}) = 0$
- $v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 10$

Przykład – podział kosztów

- $N = 3$ studentów wraca z imprezy na Woli wspólną taksówką
- jeden mieszka na Ochocie, drugi na Mokotowie, trzeci na Ursynowie
- tzw. gra kosztów
- funkcja kosztu $c(S)$
- jaka relacja łączy $c(S)$ i $v(S)$?

Koalicje i bodźce do ich tworzenia

- tworzenie koalicji zależy od indywidualnych bodźców i ’pozycji negocjacyjnych’
- w praktyce: nietrywialne zadanie (zob. koalicje parlamentarne, wyborcze)
- koalicja rozłącznych podgrup S i T ($S \cap T = \emptyset$) jest opłacalna, jeśli $V(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$
- gry, które spełniają powyższe dla wszystkich S, T są **superaddytywne**
- słabsze założenie: $S \subset T \Rightarrow v(S) \subset v(T)$
- gry, które spełniają powyższe dla wszystkich S, T są **monotoniczne**

Negocjacje wewnątrz koalicji

- załóżmy, że stworzona została koalicja M o wartości $v(M)$
- jak podzielić $v(M)$ między koalicjantów?
- mnóstwo ciekawych zastosowań:
    - jak rozdzielić ’stołki’ ministerialne między partie w koalicji parlametarnej?
    - jak rozdzielić koszty dużych inwestycji (np. lotniska) pomiędzy graczy, którzy czerpią zysk z tej inwestycji (np. różnych rozmiarów linie lotnicze)?
- ...i sporo ciekawych pomysłów: **rdzeń, zbiór stabilny, wartość Shapleya, jądro, nukleous...**

Rdzeń

Załóżmy, że zawiązała się wielka koalicja. Jak podzielić $v(N)$ na $\{x_i\}_{i=1}^N$
Warunki minimalne na podział:

- efektywność: $\sum_i x_i = v(N)$
- indywidualna racjonalność $x_i \geq v(i)$
- koalicyjna racjonalność $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$

Rdzeń – gra w rękawiczki

- $N = 3$ graczy; 1,2 mają prawą rękawiczkę, 3 ma lewą;
- para $\{L, R\}$ jest warta 10 zł,
- $v(1) = v(2) = v(3) = v(\{1, 2\}) = 0$
- $v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 10$
- jaki jest rdzeń tej gry?
- rdzeń: $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 10$

Rdzeń – podział dolara

- $N = 3$ kolegów dostanie dolara, jeśli zdecydują (w głosowaniu większościowym), jak go podzielą
- jaki jest rdzeń tej gry?
- rdzeń może być pusty!

Rdzeń – przykład pozytywny

- (przykład z wykładu J. Winnickiej)
- trzech muzyków może koncertować osobno lub występować razem:

koalicja	wartość funkcji charakterystycznej
{śpi, pia, per}	1000
{śpi, pia}	800
{śpi, per}	500
{pia, per}	650
{śpi}	200
{pia}	300
{per}	0
∅	0

- jaki jest rdzeń tej gry?

Rdzeń – podsumowanie

- opisuje podziały racjonalne koalicyjnie
- jest dobrze określony, domknięty i wypukły
- minus: może nie istnieć (istnieje dla tzw. gier zbilansowanych, częstych w zastosowaniach ekonomicznych)
    - side note: równowaga Walrasowska należy do rdzenia :)
- minus 2: może być 'nieintuicyjny'
- minus 3: może być zbiorem

Wartość Shapleya

Koncepcja podziału $\{\bar{x}_i\}_i$ wartości koalicji o następujących własnościach:

- efektywność: $\sum_i \bar{x}_i = v(N)$
- symetria: jeśli $\forall S : i, j \notin S$ mamy $v(S \sum i) = v(S \cup j)$ to $\bar{x}_i = \bar{x}_j$
- zero dla gracza nieistotnego: jeśli istnieje i takie, że $v(S \cup i) = v(S)$ $\forall S$, to $\bar{x}_i = 0$
- liniowość: jeśli dodamy dwie gry o funkcjach charakterystycznych v i w, to $\bar{x}_i^{v+w} = \bar{x}_i^v + \bar{x}_i^w$

Twierdzenie
Wartość Shapleya jest jedynym podziałem spełniającym wszystkie powyższe.

Wartość Shapleya

Inne własności wartości Shapleya:

- zawsze istnieje (yay!)
- jest jednoznacznie wyznaczona (tj. jedyna)
- daje się 'łatwo' obliczyć:

$$\bar{x}_i = \sum_{S: i \notin S} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} v(S \cup i) - v(S)$$

Wartość Shapleya a rdzeń

Czy wartość Shapleya należy do rdzenia?

- oczywiście *nie zawsze* (były 2 przykłady!)
- ale należy dla gier wypukłych, tj. spełniających

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$$

- side note: gry wypukłe są superaddytywne, mają zawsze niepusty rdzeń, a wartość Shapleya jest środkiem ciężkości rdzenia

Wartości Shapleya

- podział dolara? (hint: zgadnij z symetrii)
- gra w rękawiczki?
- muzycy? (tu trochę liczenia...)

Wartość Shapleya a gra kosztów

Rozważmy kooperacyjną grę kosztów $< N, c >$. Można ją łatwo przerobić na grę z funkcją charakterystyczną v (tzw. grę dualną), następująco:

$$v(S) = v(N) - v(N \setminus S)$$

- nieoczywista własność: wartość Shapleya jest taka sama dla gry kosztu i gry zysku

Przykład – podział kosztów

- $N = 3$ studentów wraca z imprezy na Woli wspólną taksówką
- jeden mieszka na Ochocie (3.5 km od imprezy), drugi na Mokotowie (7 km z Ochoty, 10 km z imprezy), trzeci na Ursynowie (5.5 km z Mokotowa, 10 z Ochoty, 12.5 km od imprezy)
- taksówka kosztuje 4.5 za km i 8 za start (autentyczne nocne ceny warszawskie)
- jak powinni podzielić rachunek?

Podział kosztów

- jeśli każdy z nich pojedzie sam, zapłacą łącznie 141 zł
- jeśli pojadą razem: 80 zł
- przestrzeń do współpracy
- [klik] zobaczmy jak to policzyć